

二極真空管による熱電子の速度分布の測定

笠 原 中 庸

ここで紹介する実験は、生徒に気体の分子運動のモデルを理解させることを目的として、直接、熱電子の速度分布を測定する実験である。また、この実験で得た結果にもとづき、ステファン・ボルツマンの法則についてもふれる。この実験には特殊な装置は必要なく、二極真空管、マイクロアンペア計、直流電圧計と電源が必要とする主なものである。

1. はじめに

高等学校物理の内容の一つに、「気体分子の運動」があり、気体の状態を表す量としての体積・圧力・温度の関係を微視的な分子運動の立場から考察し、気体の圧力や温度を分子運動から理解させることをめざしている。しかしながら、微視的な立場からの、ものの見方、考え方を説明しても、生徒に、実際に分子が運動しているということを納得させることはむずかしい。その原因の一つは、我々が簡単に測定できる物理量は、巨視的なものになりがちで、分子運動の速度分布などを学校現場で測定することが困難であるからと考えられる。

気体の分子運動の速さを測定する実験としては、Zartman の炉と回転ドラムを用いる測定法が、かなりの教科書（物理Ⅱ）に紹介されている。しかし、ほとんどの学校にある真空ポンプでは、 10^{-3} mm Hg 程度の真空しか得られない。この程度の真空では、分子の平均自由行程が cm のオーダーにしかならず、Zartman の実験を再現するのはむずかしい。また、分子の運動速度の大きさが非常に大きいにもかかわらず、通常分子は中性であるため、電気的な直接の制御ができないことも、分子運動の速度の直接測定を困難なものにしている。

そこで、ここでは、電気的な制御のできる電子気体の熱運動について、速度分布などを直接に測定する実験を検討する。ここで紹介する実験は、原理なども、Zartman の実験と同様に非常に簡単であるので、生徒の理解も容易であろうと思われる。なお、この段階で、電子を持ち出すことについては、困難な面もあるが、熱運動は気体分子ばかりでなく、もっと一般的に成り立っている考えであることに、目を開かせる意味もあり、前向きに取り組みたい。

2. Zartman の実験と二極真空管による熱電子の速度分布の測定実験

この節では、最初に Zartman の実験に簡単にふれ、これと対比させて、二極真空管による熱電子の速度分布の測定について述べる。

Zartman の実験では、高温の炉の中で銀の蒸気を作り、そこから飛び出してくる分子を、回転する

円筒内のフィルムに付着させる（図 1 参照）。このとき速い分子ほど、フィルムの A 端近くに付着するので、その状態から、分子の速さやその分布が測定できる。

一方、二極真空管は、カソードをヒーターで加熱して、カソード内の電子を、いわば、蒸発させ、その電子を正電圧をかけたプレートに引き寄せることにより電流を流すのが一般的な使用法である。ところで、プレートに負電圧をかけたら、どうなるであろうか。カソードから飛びだしてくる電子のうち、運動エネルギーの小さなものは、プレートにかけられた負電圧のため、カソードに押しもどされ、真空管を流れるプレート電流 I_p には寄与しない。運動エネルギーの十分大きな電子だけが負電圧に打ち勝ち、プレートにたどりつき、電流を流す。このように考えると、プレートに $-V$ の負電圧をかけた時、流れる電流 I_p は、プレート方向 (x 方向) の速さ v_x が

$$\frac{1}{2} m v_x^2 \geq e V \quad \cdots \cdots \cdots (1)$$

を満足する電子の数に比例するであろうと考えられる。ここに、 m と e はそれぞれ電子の質量と電荷である。このため、電圧 V を変化させれば、その時の電圧 V に対応した速さ v_x ($1/2 \cdot m v_x^2 = e V$) をもつ電子の数 $n(v_x)$ に比例して、電流 I_p が変化するはずである。このようにして、電圧 V とその時流れる電流 I_p を測定すれば、電子の速さの分布を知ることができる。

3. 速度分布

実際に、二極真空管 6 X 4 を用いて、プレート電圧 ($-V$) と電流 I_p を測定した結果を図 3 に示す。この図 3 より、それぞれの電圧 V に対応した速さ v_x をもつ電子の数 $n(v_x)$ (正確には $n(v_x)$ に比例する量) は次のようにして得られる。電圧 V を一定量 (0.1 V) 変化させた時の電流 I_p の変化量が $n(v_x)$ で、図 3 より計算して図 4 が得られる。この図 4 をみると、測定

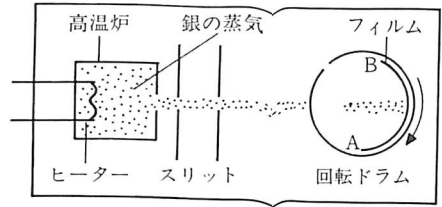


図 1 Zartman の実験

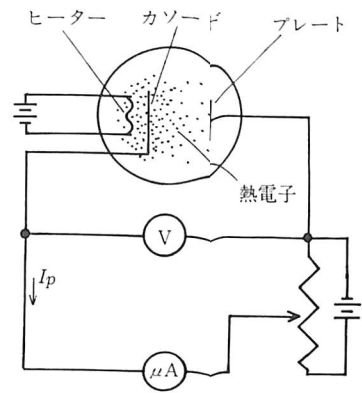


図 2 二極真空管による電子の速度分布の測定

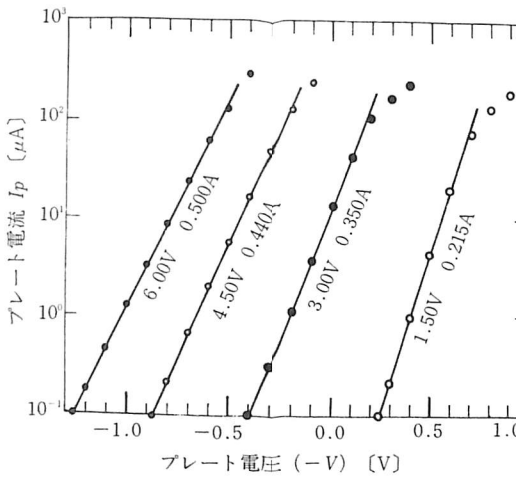


図 3 プレート電圧とプレート電流
図中の直線は $I_p = I_0 \exp(-\beta e V)$ で、電圧と電流の値はヒーターのそれである。

点は、図中の直線に良くのることがわかる。このことは、 $n(v_x)$ が n_0 、 β を V によらない定数として

$$n(v_x) = n_0 e^{-\beta e V} = n_0 e^{-\beta \frac{1}{2} m v_x^2} \dots (2)$$

とあらわせることを意味する。これまで、 x -方向のみ考えてきたが、 y -方向、 z -方向も同様であるとすると、それぞれ $\exp(-\beta/2 \cdot m v_y^2)$ 、 $\exp(-\beta/2 \cdot m v_z^2)$ に比例することになり、速度が (v_x, v_y, v_z) の電子の数 $n(v_x, v_y, v_z)$ は、

$$e^{-\beta \frac{1}{2} m v_x^2} \cdot e^{-\beta \frac{1}{2} m v_y^2} \cdot e^{-\beta \frac{1}{2} m v_z^2} = e^{-\beta \frac{1}{2} m v^2}$$

に比例する。ここに、 $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$ である。速度の方向はかまわず、大きさが v の電子の数 $n(v)$ は、同じ v でも v_x, v_y, v_z の色々な値のものがあることを考慮すると (図5参照)、 $n(v_x, v_y, v_z)$ の $4\pi v^2$ 倍になる。結局、 C を比例係数として

$$n(v) = 4\pi C v^2 e^{-\beta \frac{1}{2} m v^2} \dots (3)$$

とあらわせることになる。この(3)式の分布をマクスウェル-ボルツマンの分布という。なお(3)式の分布を規格化すれば $C = [m\beta/(2\pi)]^{3/2}$ となり、図4の傾きから求めた β の値に対して、図6の分布となる。(3)式より、平均の運動エネルギー $\langle mv^2/2 \rangle$ は、 $\langle mv^2/2 \rangle = 3/2 \cdot \beta^{-1}$ となる。図4より、ヒーターに与える電力 P と β の関係は表1ようになる。この表1より真空管のヒーターに与える電力が大きいほど、つまりカソードの温度が高いほど β の値は小さくなり、電子の平均運動エネルギー $\langle mv^2/2 \rangle$ は大きくなることからわかる。事実、ボルツマン定数を k 、絶対温度を T とすると、 $\beta^{-1} = kT$ の関係にある。表1における電子の温度 T はこの関係より計算したものである。

表1 ヒーターの電力と電子の温度

P [W]	3.00	1.94	1.05	0.323
βe [V^{-1}]	9.60	11.0	12.3	15.4
T [$10^3 K$]	1.21	1.05	0.943	0.753

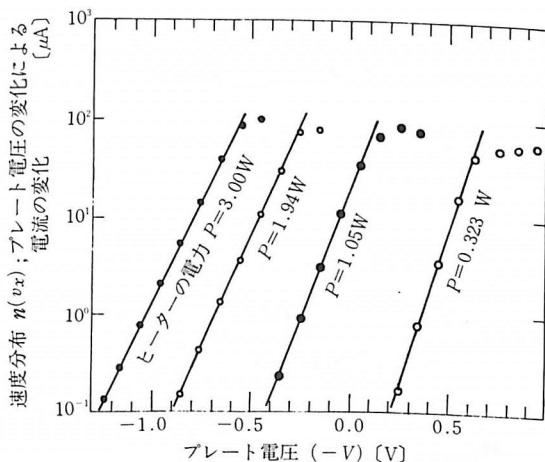


図4 速度分布 $n(v_x)$ 、図中の直線は $n(v_x) = n_0 \exp(-\beta e V)$ である。

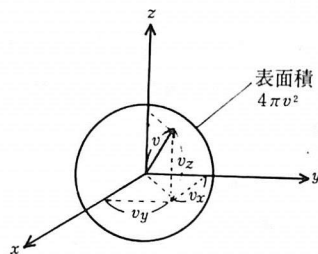


図5 速度ベクトル空間

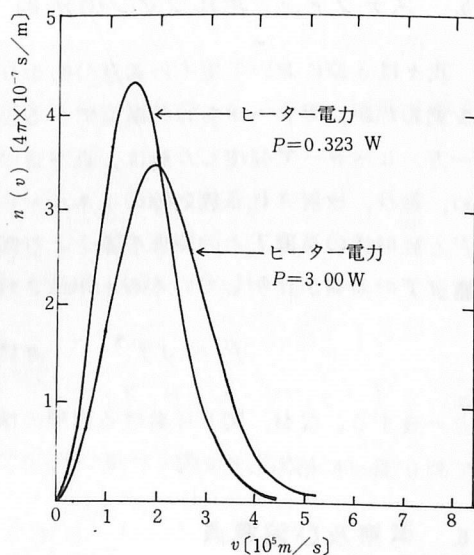


図6 電子の速度分布 $n(v)$

4. 半導体ダイオードによる代替実験

前節の実験は、二極真空管が手もとにない場合でも半導体ダイオードを用いて、ほとんど同様な手続きで行うことができる。半導体ダイオードの場合、順方向に電圧 V をかけることは、真空管における電流をさえる電圧を V だけ小さくするのと同じ効果をもつ。このため、電圧を変化させた時の電流の大きさは、その電圧に相当したエネルギーや速度をもつ電子や正孔の数に比例すると考えられるので、電圧と電流の測定を行えば、前節の二極真空管の場合と全く同様に速度分布を求めることができる。図 7 に、半導体ダイオード 1S1588 による測定結果を示す。この場合 \log - プロットにおける直線性は真空管より良いが、生徒に説明する場合、原理面での複雑さが難点である。半導体ダイオードの場合、注意すべき点は、前節の比例定数 β とダイオードの周囲温度 T との関係が、ダイオードにより、異なり、 $\beta^{-1} = nkT$; ($n = 1 \sim 2$) となることである。しかし、この場合でも β と T の反比例関係は成立している。

5. ステファン-ボルツマンの法則

我々は 3 節において電子の速度分布より、その温度を求めたが、カソードもこの温度であると考えられる。図 8 ステファン-ボルツマンの法則 一方、ヒーターで発生した熱は、真空管の構造上、大部分カソードから熱線として放射される。そのため、毎秒、放射される放射線のエネルギーは、ヒーターの消費電力 P で与えられる。そこで、この電力 P と放射体の温度 T との関係を表 1 より図にすると、図 8 のようになり、毎秒放射されるエネルギーと温度 T の 4 乗が比例していることが示され、ステファン-ボルツマンの法則

$$P = \sigma T^4 \quad ; \quad \sigma \text{ は比例係数} \dots\dots\dots (4)$$

と一致する。なお、図 8 における直線の傾きは、カソードを完全黒体とするとき、カソードの面積にして約 0.25 cm² に相当している。

6. 考察及び留意点

前節まで生徒を対象として実験の流れを追って来たが、ここで指導する時念頭におくべきことについ

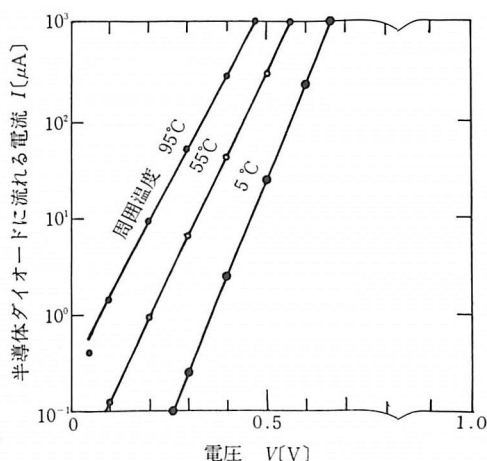


図 7 半導体ダイオードの電圧と電流
直線は $I = I_0 \exp(-\beta e V)$ である。

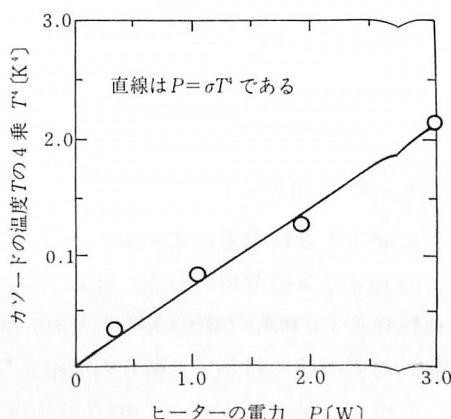


図 8 ステファン-ボルツマンの法則

て議論したい。

1) 前節までは、話しを簡単にして、生徒にわかりやすくするという教育的配慮から、金属の内と外ではポテンシャル、エネルギーが異なることや電子は正確にはフェルミ統計に従うことなどを無視する近似を行ってきたが、ここで図9に示されるようなモデルにより2節の実験におけるカソードからの電流密度を計算してみる。図9において、 ϕ_k はカソードにおける電子のフェルミ準位から電子をカソード外の無限遠にもってゆくの要するエネルギー、即ちカソードの仕事関数であり、 ϕ_p はプレートのそれである。ここで注意すべきことは、2節で電圧 V と呼んだものは、正確にはプレート電圧 V_p と一致しない。そして、図9よりわかるように、

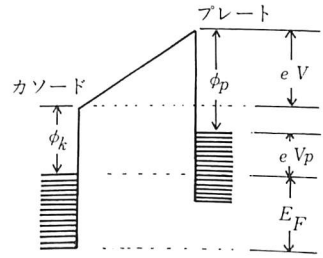


図9 電子のポテンシャルエネルギー

$$eV = eV_p + \phi_p - \phi_k \quad \dots\dots\dots (5)$$

の関係にある。通常、カソードには ϕ_k の小さな、電子の放出効率のよい金属が使用されており ($\phi_p - \phi_k$) は数 eV である。このため、 V_p をゼロにしても数ボルトの逆電圧がかかっていることになる。カソード内で単位時間、単位断面積を通り、 \vec{p} と $\vec{p} + d\vec{p}$ の間の運動量を持ち、プレート方向 (x -方向) に進む電子の数は、 $E_x = p_x^2 / (2m)$ として、

$$v_x n(\vec{p}) d\vec{p} = \frac{\partial E_x}{\partial p_x} n(\vec{p}) d\vec{p} = n(\vec{p}) dE_x dp_y dp_z \quad \dots\dots\dots (6)$$

となる。ここに、 $n(\vec{p})$ はフェルミ-ディラックの分布関数で、 E を電子の運動エネルギー、 E_F を電子のカソード内におけるフェルミ準位、 h をプランクの定数とすると、

$$n(\vec{p}) = \frac{2}{h^3} \frac{1}{\exp \{ (E - E_F) / (kT) \} + 1} \quad \dots\dots\dots (7)$$

で与えられる。上の電子のうち、 $E_x \geq eV + E_F + \phi_k$ を満すものが、電荷 e をはこび、電流密度 j に寄与するから、

$$j = e \int_{-\infty}^{\infty} dp_y \int_{-\infty}^{\infty} dp_z \int_{eV + E_F + \phi_k}^{\infty} dE_x \cdot n(\vec{p}) \quad \dots\dots\dots (8)$$

となる。一方、2節の実験の場合、 $(E - E_F)$ は数 eV 以上となり、 kT (~ 0.1 eV) に比べ十分大きいので、(7)式は、

$$n(p) \cong \frac{2}{h^3} e^{-\frac{1}{kT}(E - E_F)} = \frac{2}{h^3} e^{-\frac{1}{kT}(E_x - E_F)} \cdot e^{-\frac{1}{kT} \cdot \frac{p_y^2}{2m}} \cdot e^{-\frac{1}{kT} \cdot \frac{p_z^2}{2m}} \quad \dots\dots\dots (9)$$

と、マクスウェル-ボルツマン分布で近似できる。この近似で(8)式の積分を実行すると、

$$j = AT^2 e^{-\frac{1}{kT}(eV + \phi_k)} ; A \equiv \frac{4\pi em k^2}{h^3} = 120.4 \text{ A cm}^{-2} \text{ K}^{-2} \quad \dots\dots\dots (10)$$

となる。さらに、カソードの面積を S とするとプレート電流 I_p は $j \cdot S$ となることと(5)式を用いると、

$$\ln \left(\frac{I_p}{T^2} \right) = - \frac{1}{kT} (eV_p + \phi_p) + \ln (AS) \cdots (11)$$

の関係式が得られる。この(11)式は、2節の図3中の直線をあらわしており、この直線を必要に応じて延長して $V_p = 0$ [V] の I_p を求め、この値より $\ln(I_p/T^2)$ と T^{-1} の関係をグラフにすれば、(11)式より直線になるはずである。そして、その直線の傾きより ϕ_k が、 $(kT)^{-1} = 0$ における切片より AS が求まるはずである。このことを実行すると図10のグラフになり、上の事情と一致する。そして、その結果 $\phi_p \sim 3\text{eV}$, $AS \sim 60 \text{ A K}^{-2}$ が得られる。なお、 A の値は金属の表面状態に著しく左右され、必ずしも $120 \text{ A cm}^{-2} \text{ K}^{-2}$ とは一致しない。以上の議論でもわかるように、我々は2節の実験において、フェルミディラック分布の高エネルギー部分を測定したわけである。また、この部分は簡単なマクスウェルボルツマン分布で近似されることを利用した。そして強引に低エネルギーまで外挿して(3)式を得たのである。

2) ダイオードを使用する場合も同様で、ダイオードにかかる電圧 V と流れる電流 I は、4節の場合、 $eV \gg kT$ であるから、

$$I = I_0 \left(e^{-\frac{eV}{nkT}} - 1 \right) \cong I_0 e^{-\frac{eV}{nkT}} ; n = 1 \sim 2$$

と近似されるので利用できる。

3) 図3においてプレート電流 I_p が、約 $100\mu\text{A}$ 以上においては直線からはずれてくるが、これは、管内の電子密度が大きくなり、電子と電子の反発力の効く、空間電荷制限領域に入ったためである。我々がこの実験で使用するのは、温度制限領域の初期電流の部分であることに留意しなければならない。真空管を本来の目的に使用する時は、空間電荷制限領域で使用している。

4) 測定上留意しなければならないことは、図2のように配線するためには、用いる電圧計は内部抵抗が数 $10 \text{ M}\Omega$ 以上でこれを通る電流を無視できるものでなければならない。なお、電流計による電圧降下を補正すれば、電源の電圧を測定することにより、プレート電圧を求めることができる。この場合は電圧計の内部抵抗に神経質になる必要はない。

参考文献

霜田光一：エレクトロニクスの基礎，裳華房（1963）

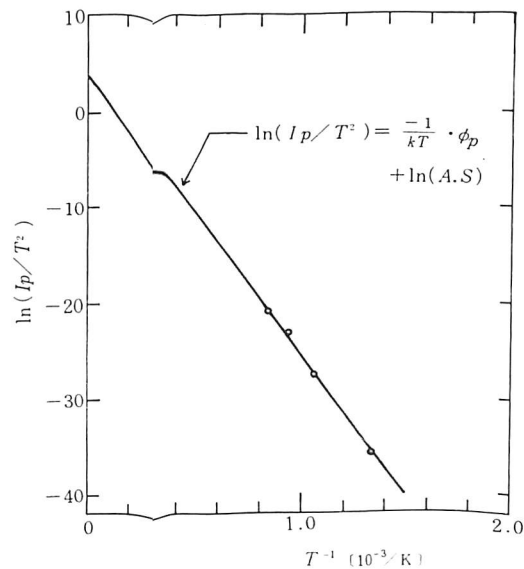


図10 $\ln(I_p/T^2)$ と T^{-1} の関係